

# 九十二學年度大專電腦軟體競賽

## 大學乙組試題

大學乙組電腦軟體競賽的題目共有 5 題。每個題目包含：問題說明，輸入檔案，輸出檔案，輸入樣本，輸出樣本等五個部分。每個題目的輸入檔案可能包括許多組測試資料，你的程式必須依序處理每一組測試資料，並且依照輸出檔案的要求印出答案。輸出樣本是假設輸入資料為輸入樣本時應該得到的答案。你可以參考輸入樣本，自行建立輸入資料檔，以便測試你的程式。但是，不可以只針對輸入樣本設計程式，評審的測試資料可能和輸入樣本不同。

第  $i$  題的輸入檔案名稱為 `pia.dat`,  $i = 1, 2, \dots, 5$ ; 輸出檔案則都為“標準輸出”，例如：在 C 中為“`stdout`”，在 pascal 中為“`output`”。目前 PC 上，一般預設標準輸出為螢幕，但是在評審時，程式的輸出必須能夠用印表機列印出來。因此，印出資料時要注意：每組輸出資料之間至少要空一行，每行不可以超過 80 個字，並且不可以有螢幕控制碼。程式不需加註說明 (comments)。除非題目另有要求，可以用任何演算法撰寫程式，不需要核對輸入資料是否正確。

競賽的時間為 4 小時。競賽結束後，由監試人員以評審的測試資料執行各組的程式。除了題目另有規定外，每個題目所能使用的計算時間為 1 分鐘。在 1 分鐘內，答對所有的輸入資料者，該題可以得到滿分 100 分。未能完全答對者，以答對輸入資料組數的多寡計分。每組輸入資料所佔的分數，由命題委員事先決定。程式執行時間超過，或中途不正常結束者，未完成的部分不與計分。分數總和最高者為優勝。其他事項請參考比賽的相關規定。

## 第一題

### 分解正定矩陣

一個下三角矩陣乃是主對角線以上的元素全為 0 的矩陣.

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix}$$

將一個正定矩陣分解成下三角矩陣  $L$  及其轉置矩陣  $L'$  的乘積在資料分析與模擬上非常重要. 假設  $A$  為一個  $n \times n$  的正定矩陣, 則存在下三角矩陣  $L$  使得  $A = L \times L'$ .

寫一個  $A = L \times L'$  矩陣分解的程式.

#### 輸入資料

輸入資料包含許多組測試資料, 每組測試資料的第一行是一個正整數  $n$ ,  $0 < n < 6$ , 表示以下是一個  $n \times n$  的正定矩陣. 第二行之後是這個矩陣的元素, 矩陣每一行的元素在同一行輸入, 每個元素之間至少有一個空白隔開. 最後一個資料之後接著 0, 表示輸入資料已結束.

#### 輸出資料

對每一組測試資料印出下三角矩陣  $L$  的值, 精確到小數第一位. 詳細格式參考輸出資料樣本.

#### 輸入資料樣本

```
3
1.0  2.0  0.0
2.0  8.0  6.0
0.0  6.0  10.0
0
```

#### 輸出資料樣本

```
1.0  0.0  0.0
2.0  2.0  0.0
0.0  3.0  1.0
```

## 第二題

### 計算 $a^x \bmod n$

在密碼系統中，經常要計算  $a^x \bmod n$ ，其中  $a$ ,  $x$ , 和  $n$  都是很大的整數。依照定義， $a^x$  就是  $x$  個  $a$  相乘， $(\bmod n)$  就是除以  $n$  並求其餘數。不過要將  $x$  個  $a$  相乘，當  $x$  的值很大的時候，就無法在有效的時間內計算出來。有個方法不需要將  $x$  個  $a$  相乘就可以計算出  $a^x$  的值。這個方法是先將  $x$  表示成 2 進位，從最高位元開始處理。此位元的值必須為 1。先令  $y$  的值為  $a$ 。然後從  $x$  的次高位元到最低位元依次處理。對於每一位元，先將  $y$  的值平方。若  $x$  的此一位元的值為 1，則還須再在乘上  $a$ 。以計算  $y = a^{100}$  為例，計算方法如下：

	6	5	4	3	2	1	0
$x$	1	1	0	0	1	0	0
$y$	$a$	$a^2a = a^3$	$a^6$	$a^{12}$	$a^{12}a = a^{25}$	$a^{50}$	$a^{100}$

由以上的例子可以看出，只要計算 6 個平方，在加上 2 個乘法就可以計算  $a^{100}$  了。令  $k$  表示  $x$  的二進位位元數。一般而言，用這個方法計算  $a^x \bmod n$  需要  $k - 1$  個平方，和最多  $k - 1$  個乘法。當然，每次計算平方或是乘法之後，要將計算結果除以  $n$  並求其餘數，以免其值過大。

#### 輸入資料

輸入資料包含許多組測試資料，每組測試資料包含三個正整數  $a$ ,  $x$ ,  $n$ 。最後一個資料之後接著 0，表示輸入資料已結束。每個正整數的值都小於  $2^{16}$ 。

#### 輸出資料

對每一組測試資料印出  $a^x \bmod n$  的值。詳細格式參考輸出資料樣本。

#### 輸入資料樣本

```
11 15 100
14 24 35
0
```

#### 輸出資料樣本

```
51
21
```

## 第三題

### 顛倒加

顛倒加是一個簡單的遊戲，其規則如下：選定一個正整數，將其左右顛倒再與原數相加，如果其和是左右對稱數則終止，否則再繼續上述顛倒加。若輸入資料本身就是對稱數，則不用做加法，立即停止。以 258 為例： $258 + 852 = 1110$ ， $1110 + 0111 = 1221$ 。因為 1221 為對稱數，也就是從左到右讀和從右到左讀都相同，這個遊戲就結束。

在上面的例子中，我們用到了 2 次加法就得到一個左右對稱數。通常給定一正整數只需要幾次加法就可得到左右對稱數，但也存在某些數可能根本無法終止。但是在本題中可以不考慮這些數。

寫一程式讀入正整數再經由顛倒加的遊戲找到第一個左右對稱數及所需要加法的次數。

#### 輸入資料

輸入資料為許多個測試資料，每個測試資料是一個正整數  $n$ 。最後一組測試資料之後接著一個 0，表示測試資料結束。假設每個測試資料所產生左右對稱數的值不會超過  $2^{31}$ 。

#### 輸出資料

對每一組測試資料印出兩個數字：得到對稱數之最少加法的次數及所得到的左右對稱數的值。每一組輸出佔一行，詳細格式參考輸出資料樣本。

#### 輸入資料樣本

```
123
2391
701
9521
0
```

#### 輸出資料樣本

```
1 444
2 7557
1 808
6 229922
```

## 第四題

### 階乘數的質因數表示法

正整數  $n$  的階乘定義為:  $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ . 階乘函數的值增長的很快, 例如:  $3! = 6$ ,  $5! = 120$ ,  $12! = 479001600$ . 因此需要有良好的表示方法. 根據算數基本定理, 任一正整數皆可以表示成質因數之乘積, 且其表示方式是唯一的. 一種表示大整數的方式是: 分解為質因數乘積, 再記錄各個質因數之指數次方. 例如; 120 可以用  $(3, 1, 1)$  表示, 因為  $120 = (2^3)(3)(5)$ . 同樣的道理 495 可以用  $(0, 2, 1, 0, 1)$  表示, 因為  $495 = (2^0)(3^2)(5)(7^0)(11)$

寫一程式讀入  $n$ , 列印出以質因數的乘積表示  $n!$  的值.

#### 輸入資料

輸入資料包含許多組測試資料, 每組測試資料包含一個正整數  $n$ . 最後一個資料之後接著 0, 表示輸入資料已結束. 每個正整數的值都小於  $2^{16}$ .

#### 輸出資料

對每一組測試資料印出  $n!$  的值, 以質因數的乘積表示. 詳細格式參考輸出資料樣本.

#### 輸入資料樣本

5  
10  
13  
0

#### 輸出資料樣本

5! = 3 1 1  
10! = 8 4 2 1  
13! = 10 5 2 1 1 1

## 第五題

### 分筷子

現有  $3n$  枝不同長度的筷子要平均分給  $n$  個人, 每人得 3 枝筷子. 因為這些筷子並不一樣長, 每人只能將分到的筷子中挑出長度最接近的兩枝來使用. 寫一個程式, 將這  $3n$  支筷子分給  $n$  個人, 使得  $n$  個人使用筷子長度差的平方的總合為最小.

#### 輸入資料

輸入檔案包含許多組測試資料, 每組測試資料以一個正整數  $n$  開頭, 接下來的  $n$  行是筷子長度的描述, 每行包含 3 個正整數, 代表筷子的長度. 最後一組測試資料之後接著 0, 表示輸入資料已結束. 假設  $0 < n < 10000$ , 且筷子的長度不大於 100000.

#### 輸出資料

對每一組測試資料印出  $n$  個人使用筷子長度差的平方的最小總合. 詳細格式參考輸出資料樣本.

#### 輸入資料樣本

```
2
3 1 6
11 9 7
2
1 2 3
4 5 6
0
```

#### 輸出資料樣本

```
5
2
```